На правах рукописи

Шуткина Татьяна Сергеевна

Особенности оптимизации циклических процессов при наличии дисконтирования

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Владимир 2011

Работа выполнена во Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Давыдов Алексей Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Закалюкин Владимир Михайлович

доктор физико–математических наук, профессор Бортаковский Александр Сергеевич

Ведущая организация: Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

Защита диссертации состоится 19 января 2012 г. в 16 ч 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ.212.024.02 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, пр. Строителей, 11, корп.7 ВлГУ, ауд.133.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Владимирского государственного университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

Автореферат разослан “ “ декабря 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ДМ.212.024.02 при ВлГУ
кандидат физико–математических наук,
доцент Наумова С. Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Немало естественных процессов, происходящих вокруг нас, имеют циклический характер по своей природе или являются таковыми в силу нашего управления ими. Например, цикличность легко обнаружить в ряде технологических и экономических процессов, в сосуществовании двух видов и во многих других явлениях различной природы[1]. При наличии возможности управлять таким процессом возникает задача выбора цикла, доставляющего наилучшее возможное значение выбранного критерия качества.

В силу понятной прикладной значимости результатов в такой задаче, анализ и оптимизация различных моделей циклических процессов проводились многими авторами с использованием различных методов[2,3,4]. В.И.Арнольд для анализа таких процессов предложил использовать методы теории особенностей[5,6]. В рамках этого подхода для однопараметрических циклических процессов без дисконтирования были изучены типичные особенности средней временной выгоды[7], оптимальных стационарных стратегий и переходов от них к циклическим[8], стационарных стратегий в двух и трехпараметрическом случаях[9] и получен ряд других интересных результатов.

Целью работы является развитие теории оптимизации циклических процессов по функционалу усредненной выгоды при наличии дисконтирования по доходу или прилагаемым усилиям и классификация типичных особенностей усредненной выгоды для однопараметрических процессов.

Методы исследований. Основные результаты работы получены ме-

[1] Д. Эрроусмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М. "МИР 1986. - 243 с.

[2] А.А. Зевин. О некоторых особенностях оптимальных циклических траекторий// Автоматика и телемеханика. - 1980. - №3. - С.19-23.

[3] H. Maurer, Ch. Büskens, G. Feichtinger. Solution techniques for periodic control problems: a case study in producting planning// Optim. Control Appl. Meth.- 1998. - Vol. 19. - pp. 185-203.

[4] А.М. Цирлин. Методы усредненной оптимизации и их приложения// М.: Наука. Физматлит. - 1997.

[5] В.И. Арнольд. Выпуклые оболочки и повышение производительности систем при пульсирующей загрузке// Сиб. матем. журнал. - 1987. - Т. 28, № 4. - С. 27-31.

[6] В.И. Арнольд. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах// Функц. анализ и его приложения. - 2002. - Т.36 - С. 1-11.

[7] А.А. Давыдов. Особенности типичной выгоды в модели Арнольда циклических процессов// Труды МИАН. - 2005. - Т.250. - С. 79-94.

[8] A.A Davydov, H. Mena-Matos. Singularity theory approach to time averaged optimization//Singularities in geometry and topology, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., - 2007. - pp.598-628.

[9] H. Mena-Matos, C. Moreira. Generic Singularities of the Optimal Averaged Profit among Stationary Strategies//Journal of dynamical and control system. - 2007. - Volume 13, Number 4. - pp. 541-562.

тодами теории особенностей дифференцируемых отображений, функционального анализа, мктодами качественной теории дифференциальных уравнений и оптимального управления.

Научная новизна. Основные результаты диссертации включают:

1. Теоремы существования и единственности оптимального цикла при наличии дисконтирования для типичных управляемой системы и плотности выгоды на окружности.

2. Необходимое условие оптимальности циклического процесса по функционалу усредненной выгоды при наличии дисконтирования по доходу либо по доходу и прилагаемым усилиям.

3. Классификацию типичных особенностей усредненной выгоды для однопараметрических процессов с дисконтированием по выгоде.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, её результаты найдут применение при анализе циклических процессов различной природы и оптимизации их по функционалу усреднённой выгоды, а также в научных исследованиях в вузах и институтах РАН, при чтении специальных курсов для студентов физико–математических специальностей университетов.

Апробация работы. Результаты докладывались

- на IV межотраслевой научно-технической конференции с участием аспирантов и молодых учёных "Вооружение. Технология. Безопасность. Управление."(2009);
- на Международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздаль (2009);
- на Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений"посвященной 70-летию В.А.Садовничего в г.Москва (2009);
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале (2010);
- на французско-русском семинаре "Nonlinear control and singularities"в г.Тулон (Франция) (2010);
- на Международной конференции по математической теории управления и механике в г. Суздаль (2011);

- на семинаре по нелинейному анализу и его приложениям во Владимирском государственном университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (рук. проф. Давыдов А. А., проф. Данченко В. И., доц. Беспалов М. С.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 работах. Статьи [1], [7] и [12] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы из 31 наименований. Объём диссертации составляет 61 страницу машинописного текста.

Введение посвящено истории проблемы, краткому обзору достижений предшественников, определению основных понятий и формулировке основных результаты работы.

В первой главе диссертации формулируются основные определения, задача усредненной оптимизации циклического процесса с дисконтированием по доходу, а также по доходу и прилагаемым усилиям. Основной результат первой главы - это теоремы существования и единственности, а также необходимое условие экстремума оптимального циклического процесса с дисконтированием по доходу либо по доходу и прилагаемым усилиям.

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности, задаваемой полем скоростей v, гладко зависящим от точки x окружности и управляющего параметра. Предполагается, что этот параметр пробегает гладкое компактное многообразие (или объединение таковых) и принимает не менее двух различных значений, а все допустимые скорости положительные, то есть $v > 0$.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение $x : t \mapsto x(t)$ отрезка временной оси в фазовое пространство, в точках дифференцируемости которого его производная лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей этой точки.

Цикл с периодом T, $T > 0$, - это допустимое движение $x, x(t+T) \equiv x(t)$. При наличии непрерывной *плотности выгоды* f на окружности выбор циклического процесса с максимальной средней временной выгодой за один оборот

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))dt \to \max . \qquad (1)$$

является одной из важных задач оптимального управления. В.И. Арнольд показал, что при разумных положениях такой цикл существует, а соответствующее ему движение устроено просто - оно использует максимальные и минимальные допустимые скорости скорости на участках, где плотность выгоды меньше либо больше максимальной средней временной выгоды за цикл (см. ссылки [6],[7] на стр. 3). В диссертации, аналогичный результат получен для циклов при наличии дисконтирования. Следуя В.И. Арнольду (см. ссылку [6] на стр. 3), используя положительность допустимых скоростей, задачу можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sigma \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x)\rho(x)dx \Big/ \int_0^{2\pi} \rho(x)dx \to \max \tag{2}$$

где σ - показатель дисконтирования и для допустимого движения $x, x = x(t)$, плотность ρ задается как $\rho(x(t)) = 1/\dot{x}(t)$ всюду, где производная $\dot{x}(t)$ определена, то есть почти всюду на окружности, а в остальных точках эта плотность может быть взята любой допустимой. Здесь 0 и 2π - это начальная и конечная точки цикла, соответственно. В такой формулировке задачи необходимо найти измеримую плотность ρ, доставляющую максимум функционала (2) и удовлетворяющую ограничениям

$$r_1 \leq \rho \leq r_2, \tag{3}$$

где r_1 и r_2 положительные функции, равные обратным значениям максимума и минимума допустимой скорости, соответственно. Измеримая плотность удовлетворяющую ограничениям (3), называется *допустимой.*

Теорема 1. Для непрерывных плотности выгоды и положительных функций $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$ существует допустимая плотность, доставляющая точную верхнюю грань значений функционала в (2) по всем допустимым плотностям.

Теорема 2.*(необходимое условие оптимальности)* Если для непрерывных плотности выгоды f и положительных функций r_1, r_2, $r_1 \leq r_2$ допустимая плотность ρ доставляет максимум A функционала в (2), то в любой точке x, где эта плотность является производной своего интеграла, значение функции S

$$S(x) = e^{-\sigma \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} e^{-\sigma \int\limits_0^y \rho(z)dz} f(y)\rho(y)dy - A, \tag{4}$$

является либо неположительным, либо неотрицательным, либо равным нулю, если $\rho(x)$ принимает значение $r_1(x)$ или $r_2(x)$, или принадлежит интервалу $(r_1(x), r_2(x))$, соответственно.

Функция S играет роль функции переключения. Условие (4) получено прямыми вычислениями изменения средней временной выгоды при вариации допустимой плотности ρ на величину h на отрезке $[x, x+\nu]$ при $x \in (0, 2\pi)$ (при граничных x рассуждения аналогичны) и достаточно малом $\nu > 0$.

Функцию переключения можно переписать в виде

$$e^{-\sigma \int\limits_0^x \rho(z)dz} f(x) + \sigma \int\limits_0^x e^{-\sigma \int\limits_0^y \rho(z)dz} f(y)\rho(y)dy - \sigma P - A, \tag{5}$$

где

$$P = \int\limits_0^{2\pi} e^{-\sigma \int\limits_0^y \rho(z)dz} f(y)\rho(y)dy$$

полная выгода вдоль цикла. Отметим, что при $\sigma = 0$ функция переключения та же что и в случае без дисконта (см.сноску [6]).

Для дифференцируемой плотности выгоды функцию переключения можно записать как

$$f(0) + \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z)dz} f'(y)dy - \sigma P - A \tag{6}$$

проинтегрировав второе слагаемое (5) по частям. Отметим, что в этой форме, задав константу $c = -A - \sigma P$, можно вычислять управление по правилу теоремы, начиная движение из нуля и беря на уровне c большую скорость. Такое движение будем называть *циклом уровня c*.

Теорема 3. *(единственности)* Для дифференцируемой плотности выгоды f с конечным числом критических точек и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, цикл, доставляющий максимальную среднюю временную выгоду, определен однозначно, если эта плотность неотрицательна. Более того, уровень c оптимального цикла, выгода P и средняя временная выгода A вдоль него удовлетворяют уравнению

$$c = -A - \sigma P. \tag{7}$$

Обозначим через m, M максимальное и минимальное значения константы c (= значения функции переключения в нуле) такие, что при $c < m$ и $c > M$ движение по циклу уровня c происходит с допустимой минимальной и максимальной плотностями, соответственно. Понятно, что

$$m = -\max_{x\in[0,2\pi]} \int\limits_0^x e^{-\sigma\phi_1(y)} f'(y)dy \quad \text{и} \quad M = -\min_{x\in[0,2\pi]} \int\limits_0^x e^{-\sigma\phi_2(y)} f'(y)dy$$

где $\phi_i = \int\limits_0^x r_i(y)dy$, $i = 1, 2$, и что цикл с наибольшей средней временной выгодой является циклом некоторого уровня $c \in [m, M]$. Как и в случае без дисконтирования период цикла уровня оказывается монотонной функцией:

Теорема 4. Для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических точек и непрерывных функций ограничения r_1 и r_2, $r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, период цикла уровня c является непрерывной возрастающей функцией на отрезке $[m, M]$, кроме того, вне значений уровня, для которых функция переключения имеет критические точки или концевые точки цикла на своем нулевом уровне, эта функция дифференцируема и её производная вычисляется по формуле

$$T'(c) = \sum_{\{x_i\}} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i))}{e^{-\sigma\varphi(x_i)}|f'(x_i)|}, \tag{8}$$

где суммирование идет по точкам переключения.

Обозначим $\tau_m = T(m)$ и $\tau_M = T(M)$. В условиях последней теоремы на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ определена и непрерывна обратная функция $c : T \mapsto c(T)$ к функции T периода цикла уровня, и на этом отрезке выгоду $P = P(c)$ и среднюю временную выгоду $A = A(c)$ вдоль цикла уровня $c \in [m, M]$, можно рассматривать как функции от периода этого цикла, то есть $P = P(c(T))$ и $A = A(c(T))$, $T \in [\tau_m, \tau_M]$. Обе эти функции оказываются дифференцируемыми:

Теорема 5. Выгода и средняя временная выгода как функции периода цикла уровня является дифференцируемой на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ с производными

$$P'_T(c(T)) = -c(T) - \sigma P(c(T)), \tag{9}$$

$$A'_T(c(T)) = -\frac{c(T) + \sigma P(c(T)) + A(c(T))}{T}. \tag{10}$$

если числа критических точек дифференцируемой плотности выгоды и точек совпадений значений непрерывных функций ограничения r_1 и r_2, $r_1 \leq r_2$, конечны.

В частности, из последней формулы и вытекает (7).

Основной результат **второй главы** диссертации - это теорема о классификации типичных особенностей средней временой выгоды для однопараметрических циклических процессов с дисконтирование по доходу. Сначала обосновывается метод анализа особенностей максимальной средней временной выгоды как функции параметра, а затем находится классификация особенностей.

В параметрическом случае особенности максимальной и минимальной скоростей являются одним из источников особенностей у максимальной средней временной выгоды как функции параметра. В случае общего положения при одномерном параметре p максимальная плотность усилия вблизи каждой точки (x, p) либо гладкая либо имеет одну из трех типичных особенностей как у функций

$$1)\,|u|, \quad 2)\,\max\{v, |u|\}, \quad 3)\,\max\{-w^4 + uw^2 + vw \,|\, w \in R\} \tag{11}$$

в нуле с точностью до R^+-эквивалентности - гладкой замены координат в области определения и прибавления гладкой функции; для минимальной плотности нужно изменить знак у этих функций[10,11]. Точку с особенностями 1) - 3) мы будем называть *двойной, тройной* и *точкой сборки*, соответственно. При $\dim p = 1$ в типичном случае замыкание множества точек, где или максимальная или минимальная плотности имеют такие особенности, (=*множество Максвелла*) либо пусто, либо есть

– гладкая кривая при $\#U = 2$, а при $\#U = 3$ гладкая кривая с тройными точками, одинаковыми для максимальной и минимальной скоростей, причем множество Максвелла вблизи каждой из них есть состоит из трех гладких некасающихся кривых, либо

– гладкая кривая с тройными точками при $3 < \#U < \infty$ и дополнительно с точками сборки при $\dim U > 0$, различными для минимальной и максимальной скоростей, а также с трансверсальными самопересечениями вне этих точек.

Кроме того, множества Максвелла типичного семейства систем и любого достаточно близкого к нему переводятся одно в другое гладким диффеоморфизмом близким к тождественному. Следовательно, для семейства систем общего положения это множество размещено типично по отношению к слоям естественного расслоения $\tau : (x, p) \mapsto p$ над пространством параметра, в частности, оно может касаться слоев расслоения τ только в точках своей гладкости и с первым порядком касания. При этом каждый слой этого расслоения может содержать только одну точку такого касания, либо тройную точку, либо точку сборки, либо еще точку самопересечения этого множества. Точку такого касания будем называть

[10] В.И. Арнольд, А.Н.Варченко, С.М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. // М : Наука. - 1982. -Т.1. - С.304.

[11] Л.Н. Брызгалова. Особенности максимума функции, зависящей от параметров// Функц. анализ и его приложения. - 1977. - Т.11, вып. 1. - С. 59-60.

двойной с касанием, а остальные точки гладкости множества Максвелла - *регулярными.*

Теорема 6. *(классификация особенностей)* Для типичного однопараметрического семейства пар плотностей выгоды и управляемых систем с положительными скоростями росток наибольшей средней временной выгоды в любом значении параметра есть росток в нуле функции, равной нулю при $0 \leq p$ и одной из семи функций второго столбца Таблицы 1 при $p \geq 0$, с точностью до эквивалентности, указанной в третьем столбце, и при условиях из четвертого столбца. Более того, эта выгода для типичного семейства пар и для любого достаточно близкого к нему переводятся одна в другую гладкой Γ-эквивалентностью близкой к тождественной.

Таблица 1.

№	Особен.	Эк.	Условия
1	0	R^+	$\#U \geq 2$
2	p	R^+	$\#U \geq 2$, появление точки переключения в конце цикла
3	$p^{3/2}+p^2$	Γ_a	$\#U \geq 2$, проход минимума функции S через ноль
4	$p^{3/2}-p^2$	Γ_a	$\#U \geq 2$, проход максимума функции S через ноль
5	$p^{3/2}$	Γ	$\#U \geq 2$, проход через двойную точку с касанием у используемой скорости
6	p^2	R^+	$\#U \geq 3$, проход через тройную точку у используемой скорости, появление регулярной двойной точки на конце цикла
7	p^3	R^+	$\#U \geq 2$, переключение скоростей в двойной точке
8	$-p^{7/2}$	Γ	$\dim U > 0$, проход через точку сборки у используемой скорости

В этой таблице:

–Γ-эквивалентность - это C^∞-диффеоморфизм пространства графика функции, сохраняющий естественное расслоение над областью определения, а Γ_a - это афинная вдоль оси выгоды Γ-эквивалентность;

– проход через минимум (максимум) функции S - это равенство нулю функции переключения оптимального цикла в ее минимуме (максимуме, соответственно);

– условие прохода через точку - это использование на некотором участке скорости, доставляющей на этом участке указанную в условии особенность;

– условие переключения в двойной точке – переключение между максимальной и минимальной скоростями в такой точке, не являющейся двойной с касанием.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю профессору А. А. Давыдову за постановку задачи и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина. Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде//УМН. - 2009. - 64:1(385). – С.143–144. (диссертант 60%)

2. Davydov A., Shutkina T. Time averaged optimization of cyclic processes with discount. Nonlinear Analysis and optimization problems// Proceedings from the International conference organized by Montenegro Academy of Sciences and arts. 13. -2009. - pp.93-100. (диссертант 50%)

3. Davydov A.A., Shutkina T.S. Time averaged optimization of cyclic processes with discount // International conference "Singularities in Generic Geometry and Applications Valencia, Spain, March 23–28. – 2009. – p. 10. (диссертант 50%)

4. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Численная средневременная оптимизация циклического процесса с дисконтированием //Вооружение. Технология. Безопасность. Управление. Материалы IV межотраслевой научно-технической конференции с участием аспирантов и молодых учёных. В 3 ч.Ч.1. – Ковров: ГОУ ВПО "КГТА им. В.А. Дегтярева – 2009 – С. 164–171. (диссертант 70%)

5. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Оптимизация циклических процессов с двойным дисконтированием по средней временной выгоде // Международная конференция по математической теории управления и механике. 3–7 июля 2009: тезисы докладов, М.:МИАН. - 2009.- С.52-53. (диссертант 70%)

6. Davydov A.A., Shutkina T.S. Optimal control of cyclic processes with discount // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвященная 70-летию

   В. А. Садовничего. 30.03-01.04.2009 М: Изд. "Университетская книга". - 2009. - С.64-65. (диссертант 60%)

7. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по усилию и выгоде//Нелинейная динамика. - 2010.- 6:1.- С.151-158. (диссертант 60%)

8. T.S.Shutkina. Existence and uniqueness of optimal cyclic process with discount. // Nonlinear control and singularities. October 24-28. - 2010 [http://www.adeit.uv.es/valenciasingularities09/]

9. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Единственность цикла с дисконтированием, оптимального по средней временной выгоде. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 2–7 июля 2010 года: тезисы докладов. – М.:МИАН, - 2010. – С. 70-71. (диссертант 60%)

10. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Оптимизация циклических процессов с дисконтированием// Материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию акад. С.М. Никольского, МГУ. - 2010. - С.73. (диссертант 50%)

11. Шуткина Т.С. Единственность цикла с дисконтированием по доходу и прилагаемым усилиям, оптимального по средней временной выгоде.// Труды Владимирского государственного университета. Выпуск 7. Физико-математические основы индустрии наносистем и материалов. Из.:ВлГУ - 2010. - С. 115-118.

12. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Единственность цикла с дисконтированием, оптимального по средней временной выгоде// Труды Института математики и механики 17:2. - 2011. - С.80-87. (диссертант 60%)

13. Davydov A., Shutkina T. Generic profit singularities of one parametric cyclic process with discount.// Международная конференция по математической теории управления и механике. 1-5 июля 2011.- М.:МИАН, 2011. - С.234-235. (диссертант 60%)

14. Давыдов А.А., Шуткина Т.С.. Типичные особенности усредненной выгоды однопараметрических циклических процессов с дисконтированием// Тезисы докладов Международной конференции "Управление и оптимизация неголономными системами". - Из.: "Университет города Переславля". - 2011. - С.19-20. (диссертант 60%)

Подписано в печать 15.12.11.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 0,70. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
600000, Владимир, ул. Горького, 87.